

УДК 517.946

**І. М. Конет\***, д-р фіз.-мат. наук, професор,  
**М. П. Ленюк\*\***, д-р фіз.-мат. наук, професор

\*Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський,

\*\*Чернівецький факультет Харківського національного  
технічного університету «ХПІ», м. Чернівці

### **МОДЕЛЮВАННЯ ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ В НЕОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩАХ З М'ЯКИМИ МЕЖАМИ МЕТОДОМ ГІБРИДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ФУР'Є — ЛЕЖАНДРА — ЛЕЖАНДРА НА СЕГМЕНТІ ПОЛЯРНОЇ ОСІ**

Методом узагальненого скінченного гібридного інтегрального перетворення типу Фур'є — Лежандра — Лежандра зі спектральним параметром одержано інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку задачі дифузії на сегменті  $[R_0, R_3]$  з двома точками спряження полярної осі в припущенні, що межі середовища м'які по відношенню до відбиття хвиль. Моделювання дифузійного процесу виконано за допомогою гібридного диференціального оператора Фур'є — Лежандра — Лежандра.

**Ключові слова:** *моделювання дифузійних процесів, гібридний диференціальний оператор, власні елементи, скінченне гібридне інтегральне перетворення, основна тотожність, головні розв'язки.*

**Постановка проблеми та її аналіз.** Процеси дифузії відіграють значну роль у виробничих процесах, впливають на міцність устаткування при врахуванні механічних та технологічних умов експлуатації металів і сплавів. Найпростішою математичною моделлю такого процесу є диференціальне рівняння дифузії параболічного типу [1]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \gamma^2 u - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = f(t, r), \quad r \in (R_0, R_3) \quad (1)$$

з відповідними початковою та крайовими умовами.

Потреби практики приводили до різноманітного узагальнення рівняння (1). Але в усіх випадках дифузійні процеси вивчалися в припущенні, що межа середовища жорстка відносно відбиття хвиль. Різко змінюється картина дифузійного процесу, якщо межа середовища є м'якою по відношенню до відбиття хвиль (в крайових операторах та операторах спряження присутня похідна за часовою змінною).

У другій половині ХХ-го століття для вивчення механіко-технічних характеристик композитних матеріалів був розвинутий метод кусково-сталіх фізико-технічних характеристик [2]. Це приводило в кожній кон-

кретній задачі до інтегрування диференціальних рівнянь другого порядку (або системи таких рівнянь) із сингулярними коефіцієнтами типу дельта-функції та її похідних. Та отримати інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку задач цим методом, як виявилось, неможливо. Тому ми пропонуємо моделювання дифузійних процесів методом гібридних диференціальних операторів [3—5].

**Основна частина.** Побудуємо обмежений на множині

$$D_2 = \{(t, r) : t \in (0, \infty); r \in (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, R_3); R_0 \geq 0, R_3 < \infty\}$$

розв'язок сепаратної системи диференціальних рівнянь дифузії параболічного типу зі сталими коефіцієнтами [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \gamma_1^2 u_1 - a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} &= f_1(t, r), \quad r \in (R_0, R_1), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + \gamma_2^2 u_2 - a_2^2 \Lambda_{(\mu)_1} [u_2] &= f_2(t, r), \quad r \in (R_1, R_2), \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} + \gamma_3^2 u_3 - a_3^2 \Lambda_{(\mu)_2} [u_3] &= f_3(t, r), \quad r \in (R_2, R_3) \end{aligned} \quad (2)$$

з початковими умовами

$$u_j(t, r)|_{t=0} = g_j(r), \quad r \in (R_{j-1}, R_j), \quad j = \overline{1, 3}, \quad (3)$$

крайовими умовами

$$\left( L_{11}^0 [u_1(t, r)] \right) \Big|_{r=R_0} = g_0(t), \quad \left( L_{22}^3 [u_3(t, r)] \right) \Big|_{r=R_3} = g_R(t) \quad (4)$$

та умовами спряження

$$\left( L_{j1}^k [u_k(t, r)] - L_{j2}^k [u_{k+1}(t, r)] \right) \Big|_{r=R_k} = \omega_{jk}(t); \quad j, k = 1, 2. \quad (5)$$

У рівняннях (2) беруть участь диференціальний оператор Фур'є другого порядку  $\frac{\partial^2}{\partial r^2}$  [6] та узагальнений диференціальний оператор Лежандра [7]

$$\begin{aligned} \Lambda_{(\mu)_j} &= \frac{d^2}{dr^2} + cthr \frac{d}{dr} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left( \mu_{1j}^2 (1 - chr)^{-1} + \mu_{2j}^2 (1 + chr)^{-1} \right); \\ \mu_{1j} &\geq \mu_{2j} \geq 0, \quad j = 1, 2; \quad (\mu)_j = (\mu_{1j}, \mu_{2j}); \quad (\mu) = ((\mu)_1, (\mu)_2). \end{aligned}$$

У рівностях (3), (4) беруть участь диференціальні оператори

$$L_{jk}^m = \left( \alpha_{jk}^m + \delta_{jk}^m \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{jk}^m + \gamma_{jk}^m \frac{\partial}{\partial t}; \quad j, k = 1, 2; \quad m = 0, 1, 2, 3.$$

Розв'язок задачі (2)—(5) побудуємо методом скінченного гібридного інтегрального перетворення (СГІП) зі спектральним параметром, породженого на множині  $I_2 = (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, R_3)$  гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$M_{(\mu)} = \theta(r - R_0)\theta(R_1 - r)a_1^2 \frac{d^2}{dr^2} + \quad (6)$$

$$+ \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)a_2^2 \Lambda_{(\mu)_1} + \theta(r - R_2)\theta(R_3 - r)a_3^2 \Lambda_{(\mu)_2}$$

де  $\theta(x)$  — одинична функція Гевісайда [8].

Оскільки ГДО  $M_{(\mu)}$  самоспряжений і на множині  $I_2$  не має особливих точок, то його спектр дійсний та дискретний [9].

Власні елементи (власні числа та відповідні їм власні функції) ГДО  $M_{(\mu)}$  побудуємо методом спектральної задачі Штурма—Ліувілля: знайти на множині  $I_2$  ненульовий розв'язок сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь Фур'є та Лежандра

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^2}{dr^2} + b_1^2 \right) V_{(\mu);1}(r, \beta) &= 0, \quad r \in (R_0, R_1), \\ (\Lambda_{(\mu)_1} + b_2^2) V_{(\mu);2}(r, \beta) &= 0, \quad r \in (R_1, R_2), \\ (\Lambda_{(\mu)_2} + b_3^2) V_{(\mu);3}(r, \beta) &= 0, \quad r \in (R_2, R_3) \end{aligned} \quad (7)$$

з крайовими умовами

$$\left( \tilde{\alpha}_{11}^0 \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{11}^0 \right) V_{(\mu);1}(r, \beta) \Big|_{r=R_0} = 0, \quad \left( \tilde{\alpha}_{22}^3 \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{22}^3 \right) V_{(\mu);3}(r, \beta) \Big|_{r=R_3} = 0 \quad (8)$$

та умовами спряження

$$\begin{aligned} [(\tilde{\alpha}_{j1}^k \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{j1}^k) V_{(\mu);k}(r, \beta) - (\tilde{\alpha}_{j2}^k \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{j2}^k) V_{(\mu);k+1}(r, \beta)] \Big|_{r=R_k} &= 0, \\ j, k &= 1, 2 \end{aligned} \quad (9)$$

У рівностях (7)—(9) беруть участь: спектральний параметр  $\beta$ , компоненти  $V_{(\mu);j}(r, \beta)$  спектральної власної вектор-функції

$$V_{(\mu)}(r, \beta) = \sum_{j=1}^3 \theta(r - R_{j-1})\theta(R_j - r) V_{(\mu);j}(r, \beta) \quad (10)$$

та функції

$$\begin{aligned} b_j &= a_j^{-1}(\beta^2 + k_j^2)^{1/2}, \quad (k_j^2 \geq 0, \quad j = \overline{1, 3}), \quad \tilde{\alpha}_{jk}^m = \alpha_{jk}^m - (\beta^2 + \gamma^2) \delta_{jk}^m, \\ \tilde{\beta}_{jk}^m &= \beta_{jk}^m - (\beta^2 + \gamma^2) \gamma_{jk}^m, \quad \gamma^2 = \max\{\gamma_1^2; \gamma_2^2; \gamma_3^2\}. \end{aligned}$$

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є  $(\frac{d^2}{dr^2} + b_1^2)v = 0$  складають функції  $v_1 = \cos b_1 r$  та  $v_2 = \sin b_1 r$  [6]; фундаментальну систему розв'язків для диференці-

льного рівняння Лежандра  $(\Lambda_{(\mu)_j} + b_j^2)v = 0$  складають функції

$A_{v_j}^{(\mu)_j}(chr)$  та  $B_{v_j}^{(\mu)_j}(chr)$  [7],  $v_j^* = -1/2 + ib_j$ ,  $j = 1, 2$ .

В силу лінійності спектральної задачі (7)—(9) покладемо

$$V_{(\mu);1}(r, \beta) = A_1 \cos b_1 r + B_1 \sin b_1 r, \quad r \in (R_0, R_1),$$

$$V_{(\mu);2}(r, \beta) = A_2 A_{v_2}^{(\mu)_1}(chr) + B_2 B_{v_2}^{(\mu)_1}(chr), \quad r \in (R_1, R_2), \quad (11)$$

$$V_{(\mu);3}(r, \beta) = A_3 A_{v_3}^{(\mu)_2}(chr) + B_3 B_{v_3}^{(\mu)_2}(chr), \quad r \in (R_2, R_3).$$

Крайові умови (8) та умови спряження (9) для визначення величин  $A_j, B_j$  ( $j = 1, 3$ ) дають однорідну алгебраїчну систему із шести рівнянь:

$$\begin{aligned} A_1 v_{11}^{01}(b_1 R_0) + B_1 v_{11}^{02}(b_1 R_0) &= 0, \\ v_{j1}^{11}(b_1 R_1) A_1 + v_{j1}^{12}(b_1 R_1) B_1 - Y_{v_2; j2}^{(\mu)_1; 11}(ch R_1) A_2 - Y_{v_2; j2}^{(\mu)_1; 12}(ch R_1) B_2 &= 0, \quad j = 1, 2, \\ Y_{v_2; j1}^{(\mu)_1; 21}(ch R_2) A_2 + Y_{v_2; j1}^{(\mu)_1; 22}(ch R_2) B_2 - Y_{v_3; j2}^{(\mu)_2; 21}(ch R_2) A_3 - Y_{v_3; j2}^{(\mu)_2; 22}(ch R_2) B_3 &= 0, \\ Y_{v_3; 22}^{(\mu)_2; 31}(ch R_3) A_3 + Y_{v_3; 22}^{(\mu)_2; 32}(ch R_3) B_3 &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

У системі (12) беруть участь функції:

$$\begin{aligned} v_{j1}^{i1}(b_1 R_i) &= -\tilde{\alpha}_{j1}^i b_1 \sin b_1 R_i + \tilde{\beta}_{j1}^i \cos b_1 R_i, \\ v_{j1}^{i2}(b_1 R_i) &= \tilde{\alpha}_{j1}^i b_1 \cos b_1 R_i + \tilde{\beta}_{j1}^i \sin b_1 R_i, \\ Y_{v_m; jk}^{(\mu)_k; m1}(ch R_m) &= \left[ \left( \tilde{\alpha}_{jk}^m \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{jk}^m \right) A_{v_m}^{(\mu)_k}(chr) \right] \Big|_{r=R_m}; \quad i = 0, 1; \\ Y_{v_m; jk}^{(\mu)_k; m2}(ch R_m) &= \left[ \left( \tilde{\alpha}_{jk}^m \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{jk}^m \right) B_{v_m}^{(\mu)_k}(chr) \right] \Big|_{r=R_m}; \quad m = 2, 3; j, k = 1, 2. \end{aligned}$$

Введемо до розгляду функції:

$$\begin{aligned} \delta_{j1}(b_1 R_0, b_1 R_1) &= v_{11}^{01}(b_1 R_0) v_{j1}^{12}(b_1 R_1) - v_{11}^{02}(b_1 R_0) v_{j1}^{11}(b_1 R_1), \quad j = 1, 2; k = 1, 2; \\ \delta_{v_2; jk}^{(\mu)_1}(ch R_1, ch R_2) &= Y_{v_2; j2}^{(\mu)_1; 11}(ch R_1) Y_{v_2; k1}^{(\mu)_1; 22}(ch R_2) - Y_{v_2; j2}^{(\mu)_1; 12}(ch R_1) Y_{v_2; k1}^{(\mu)_1; 21}(ch R_2), \\ \delta_{v_3; j2}^{(\mu)_2}(ch R_2, ch R_3) &= Y_{v_3; j2}^{(\mu)_2; 21}(ch R_2) Y_{v_3; 22}^{(\mu)_2; 32}(ch R_3) - Y_{v_3; j2}^{(\mu)_2; 22}(ch R_2) Y_{v_3; 22}^{(\mu)_2; 31}(ch R_3), \\ a_{(\mu); j}(\beta) &= \delta_{11}(b_1 R_0, b_1 R_1) \delta_{v_2; j}^{(\mu)_1}(ch R_1, ch R_2) - \delta_{21}(b_1 R_0, b_1 R_1) \delta_{v_2; 1j}^{(\mu)_1}(ch R_1, ch R_2). \end{aligned}$$

Алгебраїчна система (12) має відмінний від нуля розв'язок тоді й тільки тоді, коли її визначник дорівнює нулю [10]:

$$\delta_{(\mu)}(\beta) \equiv a_{(\mu);1}(\beta) \delta_{v_3; 22}^{(\mu)_2}(ch R_2, ch R_3) - a_{(\mu);2}(\beta) \delta_{v_3; 12}^{(\mu)_2}(ch R_2, ch R_3) = 0. \quad (13)$$

Ми одержали трансцендентне рівняння для обчислення власних чисел  $\beta_n$  ГДО  $M_{(\mu)}$ .

Підставимо в алгебраїчну систему (12)  $\beta = \beta_n$  ( $b_j(\beta_n) \equiv b_{jn}$ ,  $v_{mn}^* = v_m^*(\beta_n) = -1/2 + ib_m(\beta_n)$ ,  $m = 2, 3$ ) і відкинемо останнє рівняння внаслідок лінійної залежності. Покладемо  $A_1 = A_0 v_{11}^{02}(b_{1n} R_0)$ ,  $B_1 = -A_0 v_{11}^{01}(b_{1n} R_0)$ , де  $A_0 \neq 0$  підлягає вибору. Перше рівняння системи стає тотожністю. Для визначення  $A_2, B_2$  маємо алгебраїчну систему:

$$Y_{v_{2n}^*; j2}^{(\mu)_1; 11}(chR_1)A_2 + Y_{v_{2n}^*; j2}^{(\mu)_1; 12}(chR_1)B_2 = -A_0 \delta_{j1}(b_{1n} R_0, b_{1n} R_1), \quad j = 1, 2. \quad (14)$$

Визначник алгебраїчної системи (14) обчислюється безпосередньо:

$$q_{(\mu)_1}(\beta_n) \equiv Y_{v_{2n}^*; 12}^{(\mu)_1; 11}(chR_1)Y_{v_{2n}^*; 22}^{(\mu)_1; 12}(chR_1) - \\ - Y_{v_{2n}^*; 22}^{(\mu)_1; 11}(chR_1)Y_{v_{2n}^*; 12}^{(\mu)_1; 12}(chR_1) = \frac{c_{21,1}}{S_{(\mu)_1}(b_{2n})shR_1} \neq 0.$$

Алгебраїчна система (14) має єдиний розв'язок [10]:

$$A_2 = \frac{A_0}{q_{(\mu)_1}(\beta_n)} \left[ \delta_{21}(b_{1n} R_0, b_{1n} R_1) Y_{v_{2n}^*; 12}^{(\mu)_1; 12}(chR_1) - \right. \\ \left. - \delta_{11}(b_{1n} R_0, b_{1n} R_1) Y_{v_{2n}^*; 22}^{(\mu)_1; 12}(chR_1) \right], \quad (15)$$

$$B_2 = \frac{A_0}{q_{(\mu)_1}(\beta_n)} [\delta_{11}(b_{1n} R_0, b_{1n} R_1) Y_{v_{2n}^*; 22}^{(\mu)_1; 11}(chR_1) - \delta_{21}(b_{1n} R_0, b_{1n} R_1) Y_{v_{2n}^*; 12}^{(\mu)_1; 11}(chR_1)].$$

При відомих  $A_2, B_2$  для знаходження величин  $A_3, B_3$  маємо алгебраїчну систему з двох рівнянь:

$$Y_{v_{3n}^*; j2}^{(\mu)_2; 21}(chR_2)A_3 + Y_{v_{3n}^*; j2}^{(\mu)_2; 22}(chR_2)B_3 = \\ = A_0 [q_{(\mu)_1}(\beta_n)]^{-1} a_{(\mu)_1; j}(\beta_n), \quad j = 1, 2. \quad (16)$$

Визначник алгебраїчної системи (16) обчислюється безпосередньо:

$$q_{(\mu)_2}(\beta_n) \equiv Y_{v_{3n}^*; 12}^{(\mu)_2; 21}(chR_2)Y_{v_{3n}^*; 22}^{(\mu)_2; 22}(chR_2) - Y_{v_{3n}^*; 22}^{(\mu)_2; 21}(chR_2)Y_{v_{3n}^*; 12}^{(\mu)_2; 22}(chR_2) = \\ = \frac{c_{21,2}}{S_{(\mu)_2}(b_{3n})shR_2} \neq 0.$$

Алгебраїчна система (16) має єдиний розв'язок [10]:

$$A_3 = q_{(\mu)_1}(\beta_n)q_{(\mu)_2}(\beta_n), \quad A_3 = -\omega_{(\mu); 2}(\beta_n), \quad B_3 = \omega_{(\mu); 1}(\beta_n); \quad (17)$$

$$\omega_{(\mu); j}(\beta_n) = a_{(\mu)_1; 2}(\beta_n)Y_{v_{3n}^*; 12}^{(\mu)_2; 2j}(chR_2) - a_{(\mu)_1; 1}(\beta_n)Y_{v_{3n}^*; 22}^{(\mu)_2; 2j}(chR_2); \quad j = 1, 2.$$

Одержані згідно формул (15) та (17) значення величин  $A_j, B_j$  ( $j = \overline{1,3}$ ) підставимо у рівності (11). Отримаємо функції:

$$\begin{aligned} V_{(\mu);1}(r, \beta_n) &= q_{(\mu)_1}(\beta_n) q_{(\mu)_2}(\beta_n) [v_{11}^{02}(b_{1n} R_0) \cos b_{1n} r - v_{11}^{01}(b_{1n} R_0) \sin b_{1n} r], \\ V_{(\mu);2}(r, \beta_n) &= q_{(\mu)_2}(\beta_n) [\delta_{11}(b_{1n} R_0, b_{1n} R_1) f_{v_{2n}^{(\mu);1}}^{(\mu);1}(chr_1, chr) - \\ &\quad - \delta_{21}(b_{1n} R_0, b_{1n} R_1) f_{v_{2n}^{(\mu);12}}^{(\mu);1}(chr_1, chr)], \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} V_{(\mu);3}(r, \beta_n) &= \omega_{(\mu);1}(\beta_n) B_{v_{3n}}^{(\mu);2}(chr) - \omega_{(\mu);2}(\beta_n) A_{v_{3n}}^{(\mu);2}(chr), \\ f_{v_{j2}}^{(\mu);1}(chr_1, chr) &= Y_{v_{j2}}^{(\mu);11}(chr_1) B_v^{(\mu)}(chr) - Y_{v_{j2}}^{(\mu);12}(chr_1) A_v^{(\mu)}(chr). \end{aligned}$$

Згідно рівності (10) спектральна вектор-функція  $V_{(\mu)}(r, \beta_n)$  визначена.

Припустимо, що виконані умови на коефіцієнти:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}^0 &\leq 0, \quad \beta_{11}^0 \geq 0, \quad |\alpha_{11}^0| + \beta_{11}^0 \neq 0, \quad \alpha_{22}^3 \geq 0, \quad \beta_{22}^3 \geq 0, \quad \alpha_{22}^3 + \beta_{22}^3 \neq 0; \\ \alpha_{jm}^k &\geq 0, \quad \delta_{jm}^k \geq 0, \quad \beta_{jm}^k \geq 0, \quad \gamma_{jm}^k \geq 0, \quad c_{11,k} \cdot c_{21,k} > 0, \\ c_{j1,k} &= \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k; \quad c_{j2,k} = \delta_{2j}^k \gamma_{1j}^k - \delta_{1j}^k \gamma_{2j}^k = 0, \\ \delta_{2j}^k \beta_{1j}^k - \delta_{1j}^k \beta_{2j}^k &= \alpha_{2j}^k \gamma_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \gamma_{2j}^k, \quad j, k = 1, 2. \end{aligned}$$

Визначимо числа

$$a_1^2 \sigma_1 = \frac{c_{11,1} c_{11,2}}{c_{21,1} c_{21,2}} sh R_1, \quad a_2^2 \sigma_2 = \frac{c_{11,2}}{c_{21,2}}, \quad a_3^2 \sigma_3 = 1,$$

вагову функцію

$\sigma(r) = \theta(r - R_0) \theta(R_1 - r) \sigma_1 + [\theta(r - R_1) \theta(R_2 - r) \sigma_2 + \theta(r - R_2) \theta(R_3 - r) \sigma_3] shr$   
та квадрат норми власної вектор-функції [11]

$$\|V_{(\mu)}(r, \beta_n)\|_1^2 = \int_{R_0}^{R_3} [V_{(\mu)}(r, \beta_n)]^2 \sigma(r) dr + G_2(\beta_n, \beta_n). \quad (19)$$

Згідно з роботою [11] маємо такі твердження.

**Теорема 1** (про дискретний спектр). Корені  $\beta_n$  трансцендентно-го рівняння  $\delta_{(\mu)}(\beta) = 0$  складають дискретний спектр ГДО  $M_{(\mu)}$ : дійсні, різні, симетрично розташовані відносно точки  $\beta = 0$  й на піввісі  $\beta > 0$  утворюють монотонно зростаючу числову послідовність з єдиною граничною точкою  $\beta = \infty$ .

**Теорема 2** (про спектральну функцію). Система  $\{V_{(\mu)}(r, \beta_n)\}_{n=1}^{\infty}$  власних вектор-функцій узагальнено ортогональна на множині  $I_2$  з ваговою функцією  $\sigma(r)$ , повна й замкнена.

**Теорема 3** (про зображення рядом Фур'є). Будь-яка вектор-функція  $g(r) = \{g_1(r); g_2(r); g_3(r)\}$  з області  $G$  визначення ГДО  $M_{(\mu)}$  зображається за системою  $\{V_{(\mu)}(r, \beta_n)\}_{n=1}^{\infty}$  абсолютно та рівномірно збіжним на множині  $I_2$  рядом Фур'є:

$$g(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{R_0}^{R_1} g(\rho) V_{(\mu)}(\rho, \beta_n) \sigma(\rho) d\rho \frac{V_{(\mu)}(r, \beta_n)}{\|V_{(\mu)}(r, \beta_n)\|^2}. \quad (20)$$

Перейдемо до узагальнено ортонормованої системи власних вектор-функцій

$$\{v_{(\mu)}(r, \beta_n)\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ V_{(\mu)}(r, \beta_n) \left( \|V_{(\mu)}(r, \beta_n)\|_1 \right)^{-1} \right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Одержимо ряд Фур'є (20) в такому вигляді:

$$g(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{R_0}^{R_1} g(\rho) v_{(\mu)}(\rho, \beta_n) \sigma(\rho) d\rho \quad v_{(\mu)}(r, \beta_n). \quad (21)$$

Ряд Фур'є (21) визначає пряме  $H_{(\mu)}$  та обернене  $H_{(\mu)}^{-1}$  скінченне гібридне інтегральне перетворення (СПП) зі спектральним параметром, породжене на множині  $I_2$  ГДО  $M_{(\mu)}$ , визначеним рівністю (6):

$$H_{(\mu)}[g(r)] = \int_{R_0}^{R_1} g(r) v_{(\mu)}(r, \beta_n) \sigma(r) dr \equiv \tilde{g}_n, \quad (22)$$

$$H_{(\mu)}^{-1}[\tilde{g}_n] = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{g}_n v_{(\mu)}(r, \beta_n) \equiv g(r). \quad (23)$$

Визначимо величини та функції:

$$d_1 = a_1^2 \sigma_1 : c_{11,1}, \quad d_2 = a_2^2 \sigma_2 sh R_2 : c_{11,2}; \quad \tilde{g}_{1n} = \int_{R_0}^{R_1} g_1(r) v_{(\mu);1}(r, \beta_n) \sigma_1 dr,$$

$$\tilde{g}_{2n} = \int_{R_1}^{R_2} g_2(r) v_{(\mu);2}(r, \beta_n) \sigma_2 sh r dr, \quad \tilde{g}_{3n} = \int_{R_2}^{R_3} g_3(r) v_{(\mu);3}(r, \beta_n) \sigma_3 sh r dr,$$

$$Z_{(\mu);i2}^k(\beta_n) = \left( \tilde{\alpha}_{i2}^k \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{i2}^k \right) v_{(\mu);k+1}(r, \beta_n) \Big|_{r=R_k}, \quad i, k = 1, 2.$$

**Теорема 4** (про основну тотожність). Якщо вектор-функція  $f(r) = \{g_1''(r); \Lambda_{(\mu)}[g_2(r)]; \Lambda_{(\mu)}[g_3(r)]\}$  неперервна на множині  $I_2$ , а функції  $g_j(r)$  задовольняють крайові умови

$$\left( \tilde{\alpha}_{11}^0 \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{11}^0 \right) g_1(r) \Big|_{r=R_0} = g_0, \quad \left( \tilde{\alpha}_{22}^3 \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{22}^3 \right) g_3(r) \Big|_{r=R_3} = g_R \quad (24)$$

та умови спряження

$$\left[ \left( \tilde{\alpha}_{j1}^k \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{j1}^k \right) g_k(r) - \left( \tilde{\alpha}_{j2}^k \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{j2}^k \right) g_{k+1}(r) \right] \Big|_{r=R_k} = \omega_{jk}, \quad j, k = 1, 2 \quad (25)$$

то справджується основна тотожність СГП ГДО  $M_{(\mu)}$ :

$$\begin{aligned} H_{(\mu)}[M_{(\mu)}[g(r)]] = & -\beta_n^2 \tilde{g}_n - \sum_{i=1}^3 k_i^2 \tilde{g}_{in} + (-\tilde{\alpha}_{11}^0)^{-1} v_{(\mu);1}(R_0, \beta_n) a_1^2 \sigma_1 g_0 + \\ & + (\tilde{\alpha}_{22}^3)^{-1} v_{(\mu);3}(R_3, \beta_n) a_3^2 \sigma_3 sh R_3 g_R + \sum_{k=1}^2 d_k [Z_{(\mu);12}^k(\beta_n) \omega_{2k} - Z_{(\mu);22}^k(\beta_n) \omega_{1k}]. \end{aligned} \quad (26)$$

Одержані правила (22), (23) та (26) складають математичний апарат для одержання інтегрального зображення точного аналітичного розв'язку задачі дифузії (2)—(5).

Припустимо спочатку, що початкові умови дорівнюють нулю ( $g_j = 0$ ). Цього завжди можна досягти заміною функцій, поклавши

$$v_j(t, r) = u_j(t, r) - g_j(r).$$

Тоді  $v_j(t, r) \Big|_{t=0} = u_j(t, r) \Big|_{t=0} - g_j(r) = g_j(r) - g_j(r) = 0$ . При цьому, звичайно, будуть змінені як крайові умови, так і неоднорідності системи.

Практика показує, що початкові умови наносять на краях  $r = R_0$  й  $r = R_3$  та на межах спряження  $r = R_j$  ( $j = 1, 2$ ) за рахунок м'якості величини  $\psi_0 = \delta_{11}^0 g_0'(R_0) + \gamma_{11}^0 g_0(R_0)$ ,  $\psi_3 = \delta_{22}^3 g_3'(R_3) + \gamma_{22}^3 g_3(R_3)$ ,  $\psi_{jk} = \delta_{j1}^k g_k'(R_k) + \gamma_{j1}^k g_k(R_k) - [\delta_{j2}^k g_{k+1}'(R_k) + \gamma_{j2}^k g_{k+1}(R_k)]$ . Можна вважати, що  $\psi_0 = 0$ ,  $\psi_3 = 0$ ,  $\psi_{jk} = 0$  ( $j, k = 1, 2$ ). У протилежному випадку покладемо

$$g_j(r) = \varphi_j(r) + a_j r + b_j, \quad j = 1, 2, 3$$

та виберемо числа  $a_j, b_j$  із алгебраїчної системи рівнянь

$$\begin{aligned} & (\delta_{11}^0 + \gamma_{11}^0 R_0) a_1 + \gamma_{11}^0 b_1 = \psi_0, \\ & (\delta_{j1}^k + \gamma_{j1}^k R_k) a_k + \gamma_{j1}^k b_k - [(\delta_{j2}^k + \gamma_{j2}^k R_k) a_{k+1} + \gamma_{j2}^k b_{k+1}] = \psi_{jk}; \quad j, k = 1, 2; \\ & (\delta_{22}^3 + \gamma_{22}^3 R_3) a_3 + \gamma_{22}^3 b_3 = \psi_3. \end{aligned} \quad (27)$$

При виконанні умов на коефіцієнти алгебраїчна система (27) має єдиний розв'язок (його можна одержати за правилами Крамера [10]).

Запишемо систему (2) й нульові початкові умови у матричній формі:



$$\begin{bmatrix} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \gamma_1^2 - a_1^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) u_1(t, r) \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \gamma_2^2 - a_2^2 \Lambda_{(\mu)_1} \right) u_2(t, r) \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \gamma_3^2 - a_3^2 \Lambda_{(\mu)_2} \right) u_3(t, r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t, r) \\ f_2(t, r) \\ f_3(t, r) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u_1(t, r) \\ u_2(t, r) \\ u_3(t, r) \end{bmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Інтегральний оператор  $H_{(\mu)}$  згідно правила (22) зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка:

$$H_{(\mu)}[\dots] = \begin{bmatrix} \int_{R_0}^{R_1} \dots v_{(\mu);1}(r, \beta_n) \sigma_1 dr \int_{R_1}^{R_2} \dots v_{(\mu);2}(r, \beta_n) \sigma_2 sh r dr \\ \int_{R_2}^{R_3} \dots v_{(\mu);3}(r, \beta_n) \sigma_3 sh r dr \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Застосуємо операторну матрицю-рядок (29) до задачі (28) за правилом множення матриць. Внаслідок основної тотожності (26) маємо задачу Коші:

$$\frac{d\tilde{u}_n}{dt} + \omega_n^2 \tilde{u}_n = F_n(t), \quad \tilde{u}_n|_{t=0} = 0, \quad \omega_n^2 = \beta_n^2 + \gamma^2, \quad (30)$$

де

$$F_n(t) = (-\tilde{\alpha}_{11}^0)^{-1} v_{(\mu);1}(R_0, \beta_n) a_1^2 \sigma_1 g_0(t) + (\tilde{\alpha}_{22}^3)^{-1} v_{(\mu);3}(R_3, \beta_n) sh R_3 g_R(t) + \\ + \sum_{k=1}^2 d_k [Z_{(\mu);12}^k(\beta_n) \omega_{2k}(t) - Z_{(\mu);22}^k(\beta_n) \omega_{1k}(t)].$$

Безпосередньо перевіряється, що єдиним розв'язком задачі Коші (30) є функція

$$\tilde{u}_n(t) = \int_0^t e^{-\omega_n^2(t-\tau)} F_n(\tau) d\tau. \quad (31)$$

Оператор  $H_{(\mu)}^{-1}$  згідно правила (23) як обернений до (29) зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця:

$$H_{(\mu)}^{-1}[\dots] = \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} \dots v_{(\mu);1}(r, \beta_n) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \dots v_{(\mu);2}(r, \beta_n) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \dots v_{(\mu);3}(r, \beta_n) \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Застосуємо операторну матрицю-стовпець (32) за правилом множення матриць до матриці-елемента  $[\tilde{u}_n(t)]$ , де функція  $\tilde{u}_n$  визначена формулою (31). У результаті низки елементарних перетворень одержуємо інтегральне зображення єдиного аналітичного розв'язку задачі дифузії (2)—(5) при умові, що початкові умови  $g_j(r) = 0$  ( $j = \overline{1,3}$ ):

$$u_j(t, r) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n(t) v_{(\mu);j}(r, \beta_n) = \sum_{k=1}^3 \int_0^t \int_{R_{k-1}}^{R_k} H_{(\mu);jk}(t-\tau, r, \rho) f_k(\tau, \rho) \sigma_k \varphi_k(\rho) d\rho d\tau + \\ + \int_0^t [W_{(\mu);1j}(t-\tau, r) g_0(\tau) + W_{(\mu);3j}(t-\tau, r) g_R(\tau)] d\tau + \\ + \sum_{k=1}^2 d_k \int_0^t [R_{(\mu);12}^{j,k}(t-\tau, r) \omega_{2k}(\tau) - R_{(\mu);22}^{j,k}(t-\tau, r) \omega_{1k}(\tau)] d\tau, \quad j = \overline{1,3}; \quad (33)$$

$$(\varphi_1(\rho) = 1, \quad \varphi_2(\rho) = \varphi_3(\rho) = sh\rho).$$

У формулі (33) беруть участь головні розв'язки параболічної задачі (2)—(5):

1) породжені неоднорідністю системи (2) функції впливу

$$H_{(\mu);jk}(t, r, \rho) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\omega_n^2 t} v_{(\mu);j}(r, \beta_n) v_{(\mu);k}(\rho, \beta_n); \quad j, k = \overline{1,3}, \quad (34)$$

2) породжені крайовою умовою в точці  $r = R_0$  функції Гріна

$$W_{(\mu);1j}(t, r) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\omega_n^2 t} v_{(\mu);j}(r, \beta_n) (-\tilde{\alpha}_{11}^0)^{-1} v_{(\mu);1}(R_0, \beta_n) a_1^2 \sigma_1; \quad j = \overline{1,3}, \quad (35)$$

3) породжені крайовою умовою в точці  $r = R_3$  функції Гріна

$$W_{(\mu);3j}(t, r) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\omega_n^2 t} v_{(\mu);j}(r, \beta_n) (\tilde{\alpha}_{22}^3)^{-1} v_{(\mu);3}(R_3, \beta_n) sh R_3; \quad j = \overline{1,3}, \quad (36)$$

4) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$R_{(\mu);i2}^{j,k}(t, r) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\omega_n^2 t} Z_{(\mu);i2}^k(\beta_n) v_{(\mu);j}(r, \beta_n); \quad i, k = \overline{1,2}; \quad j = \overline{1,3}. \quad (37)$$

**Зауваження 1.** Якщо  $\gamma^2 = \gamma_1^2$ , то  $k_1^2 = 0$ ,  $k_2^2 = \gamma_1^2 - \gamma_2^2 \geq 0$ ,  $k_3^2 = \gamma_1^2 - \gamma_3^2 \geq 0$ ; якщо  $\gamma^2 = \gamma_2^2 > 0$ , то  $k_1^2 = \gamma_2^2 - \gamma_1^2 \geq 0$ ,  $k_2^2 = 0$ ,  $k_3^2 = \gamma_2^2 - \gamma_3^2 \geq 0$ ; якщо  $\gamma^2 = \gamma_3^2 > 0$ , то  $k_1^2 = \gamma_3^2 - \gamma_1^2 \geq 0$ ,  $k_2^2 = \gamma_3^2 - \gamma_2^2 \geq 0$ ,  $k_3^2 = 0$ .

**Зауваження 2.** У випадку ненульових початкових умов ( $g_j(r) \neq 0$ ) ефектом того, що межа середовища м'яка по відношенню до відбиття хвиль дифузії, є поява у розв'язку (33) доданку

$$Q_{(\mu);j}(t, r) = W_{(\mu);1j}(t, r)\psi_0 + W_{(\mu);3j}(t, r)\psi_3 + \\ + \sum_{k=1}^2 d_k \left[ R_{(\mu);12}^{j,k}(t, r)\psi_{2k} - R_{(\mu);22}^{j,k}(t, r)\psi_{1k} \right].$$

**Висновки.** Одержані розв'язки поліпараметричні. Це дає можливість вибором параметрів виділяти безпосередньо із загальних структур будь-який практично важливий частковий випадок (у рамках даної моделі). Розв'язок (33) дифузійної задачі носить алгоритмічний характер, що дозволяє застосовувати його як в теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків.

### Список використаних джерел:

1. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. : Наука, 1972. — 735 с.
2. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Ю. М. Коляно. — К. : Наук. думка, 1992. — 280 с.
3. Конет І. М. Моделювання дифузійних процесів в неоднорідних середовищах з м'якими межами методом гібридного диференціального оператора Лежандра—Фур'є—Лежандра на полярній осі  $r \geq R_0 > 0$  / І. М. Конет, М. П. Ленюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. пр. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2010. — Вип. 4. — С. 119–136.
4. Конет І. М. Моделювання дифузійних процесів в неоднорідних середовищах з м'якими межами методом гібридного диференціального оператора Бесселя—Лежандра—Фур'є на сегменті полярної осі / І. М. Конет, М. П. Ленюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. пр. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2011. — Вип. 5. — С. 112–123.
5. Конет І. М. Моделювання дифузійних процесів в неоднорідних середовищах з м'якими межами методом гібридного диференціального оператора Лежандра—Фур'є—Бесселя на сегменті полярної осі / І. М. Конет, М. П. Ленюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. пр. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2012. — Вип. 6. — С. 113–124.
6. Конет І. М. Стационарні та нестационарні температурні поля в циліндрично-кругових областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2001. — 312 с.
7. Конет І. М. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2004. — 276 с.
8. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. — М. : Физматгиз, 1959. — 468 с.
9. Конет І. М. Інтегральні перетворення типу Мелера—Фока / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці: Прут, 2002. — 246 с.
10. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. — М. : Наука, 1965. — 328 с.
11. Ленюк М. П. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра) / М. П. Ленюк, М. І. Шинкарик. — Тернопіль : Економ. думка, 2004. — 368 с.

12. Курош А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. — М. : Наука, 1971. — 432 с.
13. Ленюк М. П. Побудова скінченного гібридного інтегрального перетворення при наявності спектрального параметру в крайових умовах та умовах спряження / М. П. Ленюк, В. В. Мороз // Науковий вісник Чернівецького університету. Математика. — Чернівці : Рута, 2006. — Вип. 314–315. — С. 105–113.

The method of generalized hybrid finite integral transformation of the Fourier — Legendre — Legendre spectral parameter obtained from the integral image exact analytical solution of diffusion problem on the segment  $[R_0, R_3]$  with two points conjugation polar axis under the assumption that the interface soft against the wave reflection. Modeling diffusion process is performed in hybrid differential Fourier — Legendre — Legendre.

**Key words:** *modeling of diffusion processes, hybrid differential operator, own elements, finite hybrid integral transform primary identity key solutions.*

Отримано: 10.10.2012

УДК 004.942

**Н. Л. Костьян\***, старший преподаватель,  
**Б. С. Аскарходжаев\*\***, старший преподаватель,  
**В. В. Понедилок\*\*\***, аспирант

\* Киевский национальный университет технологий и дизайна, г. Киев,

\*\* Ташкентский государственный технический университет,  
 г. Ташкент, Узбекистан

\*\*\* Каменец-Подольский национальный университет  
 имени Ивана Огиенко, г. Каменец-Подольский

## ЧАСТОТНЫЙ СПОСОБ ВОССТАНОВЛЕНИЯ СИГНАЛА НА ВХОДЕ ЛИНЕЙНОГО ДИНАМИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА

В работе исследуется процесс воспроизведения входных сигналов динамических объектов по заданным амплитудно-частотной характеристикой и массивом дискретизированных выходных сигналов. В рамках данной задачи решается подзадача нахождения фазо-частотных и полных передаточных характеристик объектов. Предполагается фильтрация выходных и оценка погрешности входных сигналов. Приводится способ определения комбинированной оценки входных сигналов.

**Ключевые слова:** *полная передаточная функция, фазо-частотная характеристика, амплитудно-частотная характеристика, аппроксимация, оценка.*

**Постановка задачи.** В состав развитого алгоритмического и программного обеспечения систем инверсной обработки результатов наблюдений, систем автоматизации научных исследований и т.п. должны входить блоки определения полных передаточных характеристик динамических объектов по исходным данным, неявно содержащим эти ха-